Aufgaben zur Wiederholung und Übung

im Anfangsunterricht am beruflichen Gymnasium

Mittelstufe

(1) ganzrationale Funktionen

Skizzieren Sie in einem rechtwinkligen Koordinatensystem:

$y = f_1(x) = (x-1)^2 - 4$

$y = f_2(x) = 2x^3 + 6x^2 + 4x$

$y = f_3(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$

$y = f_4(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + \frac{3}{4}$

$y = f_5(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

$y = f_6(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x + 2$

$y = f_7(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

Ermitteln Sie die Bilder der gegebenen Funktionen durch Berechnung der Nullstellen und unter Zuhilfenahme weiterer Punkte aus einer geeigneten Wertetabelle.

Beachten Sie dabei den jeweiligen Typ der Funktion !

(2) Ableitungen rationaler Funktionen

Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktionen

$y = f_1(x) = 2x^3 + 6x^2 + 4x$

$y = f_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + \frac{3}{4}$

$y = f_3(x) = 3x^4 + (2x-1)^2$

$y = f_4(x) = (2x^2 + x)^3$

$y = f_5(x) = (x^3 + 4x + 4)^{-1}$

$y = f_6(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$y = f_7(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

(3) Merkmale ganzrationaler Funktionen

Berechnen Sie jeweils Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte der Funktionen

$y = f_1(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$

$y = f_2(x) = \frac{1}{4}(x^4 - x^2)$

$y = f_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

Skizzieren Sie die Funktionen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem !

(4) Zahlenfolgen

Untersuchen Sie die gegebenen Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz ! Weisen Sie Ihre Vermutungen rechnerisch nach (außer Konvergenz) !

$(a_n): \quad a_n = \dfrac{2n+1}{n}$

$(b_n): \quad b_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

$(c_n): \quad c_n = \dfrac{n-1}{n^2}$

Lösungen (1)

(1) ganzrationale Funktionen

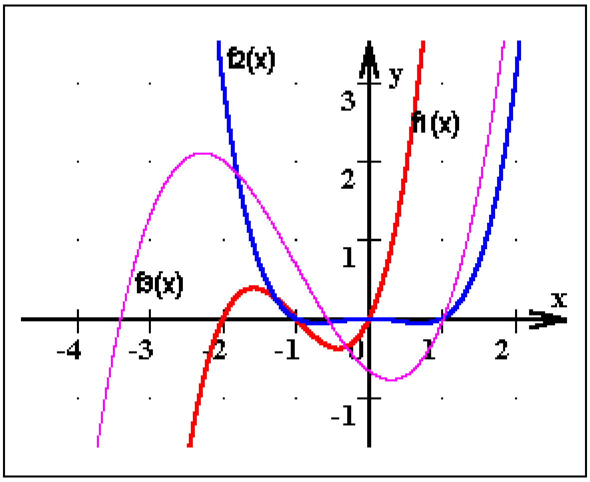
Nullstellen:

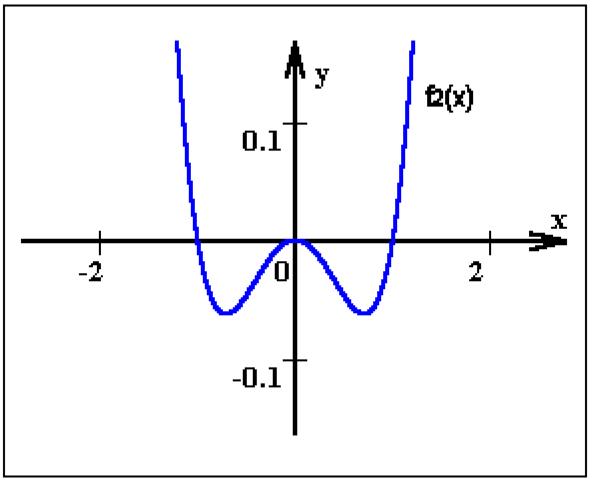
$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$
{-1;3}	{-2;-1;0}	{0±0;±2}	{±1;±1,73}	{-2}	{-2,73;0,73;2}	{1±0}

(2) Ableitungen rationaler Funktionen

	Funktionsterm	**1. Ableitung**	**2. Ableitung**
1	$2x^3+6x^2+4x$	$6x^2+12x+4$	$12x+12$
2	$\frac{1}{4}x^4-x^2+\frac{3}{4}$	x^3-2x	$3x^2-2$
3	$3x^4+4x^2-4x+1$	$12x^3+8x-4$	$36x^2+8$
4	$\left(2x^2+x\right)^3$	$3\cdot\left(2x^2+x\right)^2\cdot(4x+1)$	$240x^4+240x^3+72x^2+6x$
5	$\left(x^3+4x+4\right)^{-1}$	$-\dfrac{3x^2+4}{\left(x^3+4x+4\right)^2}$	$\dfrac{4\cdot\left(3x^4+6x^2-6x+8\right)}{\left(x^3+4x+4\right)^3}$
6	$\left(x^2+1\right)^{0,5}$	$\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{-0,5}\cdot 2x$	$\left(x^2+1\right)^{-1,5}$
7	$\dfrac{x^2}{x+1}$	$\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	$\dfrac{2}{(x+1)^3}$

(3) Merkmale ganzrationaler Funktionen





(Koordinaten der wichtigen Punkte bitte ablesen)

Lösungen (2)

Rechenbeispiel für $f_1(x)$:

Nullstellen	Extrempunkte	Wendepunkt
$0 = x^3 + 3x^2 + 2x$ $0 = x \cdot (x^2 + 3x + 2)$ $\underline{\underline{x_1 = 0}}$ $0 = x^2 + 3x + 2$ $x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{0{,}25}$ $\underline{\underline{x_2 = -2 \; ; \; x_3 = -1}}$	$0 = 3x^2 + 6x + 2$ $0 = x^2 + 2x + \frac{2}{3}$ $x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$ $P_4(-1{,}58;+0{,}38)$ $\underline{\underline{P_5(-0{,}42;-0{,}38)}}$	$0 = 6x + 6$ $x_6 = -1$ $\underline{\underline{P_6(-1;0)}}$

- die Schreibweise ist leicht verkürzt
- auf Nachweise wurde zunächst verzichtet

(4) Zahlenfolgen

$a_n = \frac{2n+1}{n}$		$b_n = \frac{n^2}{n+1}$	$c_n = \frac{n-1}{n^2}$	
$a_n > a_{n+1}$ $\frac{2n+1}{n} > \frac{2n+3}{n+1}$ $2n^2 + 3n + 1 > 2n^2 + 3n$ $1 > 0$		$b_n < b_{n+1}$ $\frac{n^2}{n+1} < \frac{(n+1)^2}{n+2}$ $n^3 + 2n^2 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ $0 < n^2 + 3n + 1$	$c_n > c_{n+1}$ $\frac{n-1}{n^2} > \frac{n}{(n+1)^2}$ $n^3 + n^2 - n - 1 > n^3$ $(n-0{,}5)^2 - 1{,}25 > 0$ $(n-0{,}5)^2 > 1{,}25$ $n_1 > \frac{1}{2} + \sqrt{1{,}25}$	
$2 < a_n$ $2 < \frac{2n+1}{n}$ $0 < 1$	$3 > a_n$ $3 > \frac{2n+1}{n}$ $3n > 2n + 1$ $n > 1$	$0 < \frac{n^2}{n+1}$ $0 < n^2$	$0 < c_n$ $0 < \frac{n-1}{n^2}$ $1 < n$	$c_n < \frac{1}{4}$ $\frac{n-1}{n^2} < \frac{1}{4}$ $0 < n^2 - 4n + 4$ $0 < (n-2)^2$

- Voraussetzung: n = {1; 2; 3; 4; ... }
- alle Rechnungen enden in einer wahren Aussage, was die Vermutungen bestätigt