Aufgaben zur Wiederholung und Übung

im Anfangsunterricht am beruflichen Gymnasium

Oberstufe

(1) schriftliche Polynomdivision

Die schriftliche Polynomdivision benötigt man beim Lösen von Gleichungen höheren Grades und bei der Untersuchung gebrochenrationaler Funktionen.

Berechnen Sie:

$$\left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right) \div (x + 2)$$

$$\left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right) \div (x - 3)$$

$$\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) \div (x - 2)$$

$$\left(x^3 + 4x^2 - 19x + 14\right) \div (x + 7)$$

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} =$$

$$\frac{2x^4 + x^3 - 6x^2 - 3x}{2x + 1} =$$

(2) Differential- und Integralrechnung bei ganzrationalen Funktionen

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 \qquad g(x) = \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 + x - 6\right)$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen !

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte und weisen Sie deren Art nach !

c) Untersuchen Sie das Verhalten im Unendlichen !

d) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf !

e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Funktion und der x-Achse vollständig umschlossen wird !

(3) Differentialrechnung bei gebrochenrationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^3 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

a) Geben Sie den Definitionsbereich an !

b) Berechnen Sie Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte ! Weisen Sie die Art der Extrema rechnerisch nach (Nachweis der Wendepunkte nicht erforderlich) !

c) Geben Sie die Gleichung der Asymptoten an !

d) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf !

(4) Integralrechnung bei gebrochenrationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$$

a) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf !

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Funktion und der x-Achse vollständig umschlossen wird !

Lösungen (1)

(1) schriftliche Polynomdivision

$x^2 - 4x + 3$	$x^2 - 4x + 3$	$x^2 + x - 2$
$x^2 + x - 2$	$x^2 - 3x + 2$	$x^3 - 3x$

(2) Differential- und Integralrechnung bei ganzrationalen Funktionen

$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$0 = x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)\cdot(x^2 - 1)$

$\underline{\underline{x_{1,2} = -1}}\ ;\ \underline{\underline{x_3 = +1}}$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$x_{4,5} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$

$P_4(-1;0)\ ;\ P_5(+\frac{1}{3};-1\frac{5}{27})$

NW: $f''(x) = 6x + 2$

$f''(x_4) = -4 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f''(x_5) = +4 > 0 \Rightarrow$ Minimum

$f''(x) = 6x + 2 = 0$

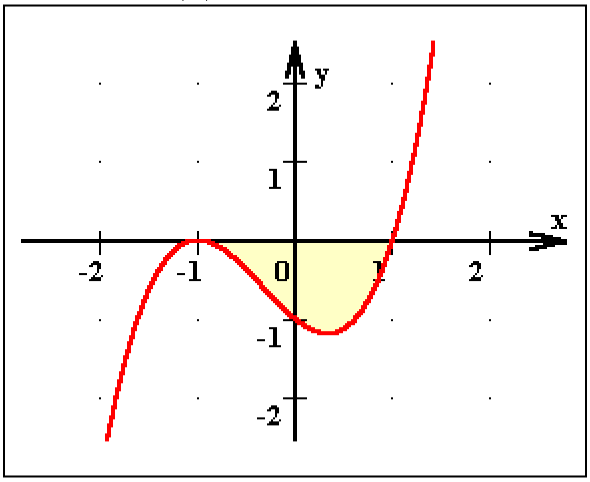
$x_6 = -\frac{1}{3}$

$P_6(-\frac{1}{3};-\frac{16}{27})$

NW: $f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

$x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$

$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$



$A = \int_{-1}^{+1} f(x)dx$

$A = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-1}^{+1}$

$\underline{\underline{A = 1\frac{1}{3}\ \text{FE}}}$

$g(x) = (x^2 - 1)\cdot(x^2 + x - 6)$

$\underline{\underline{x_{1,2} = \pm 1}}$

$0 = x^2 + x - 6 \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = -3}}\ ;\ \underline{\underline{x_4 = 2}}$

$g'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 14x - 1 = 0$

Extrema nicht berechenbar

$g''(x) = 12x^2 + 6x - 14 = 0$

$x_{5,6} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{7}{6}}$

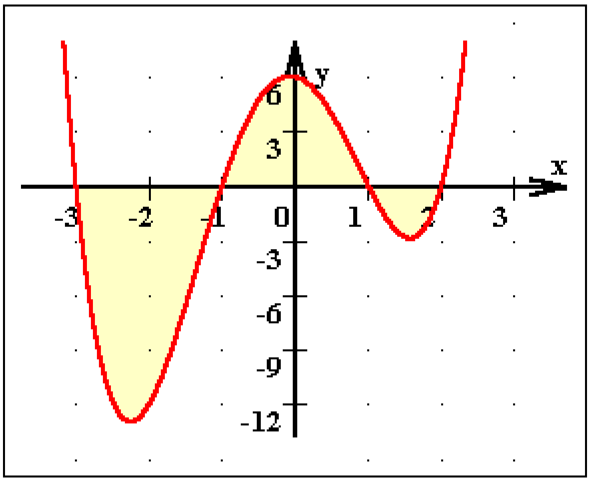
$\underline{\underline{P_5(-1{,}36;-4{,}67)}}\ ;\ \underline{\underline{P_6(+0{,}86;+1{,}12)}}$

$g'''(x) = 24x + 6$

$g'''(x_5) \neq 0\ ;\ g'''(x_6) \neq 0$

$\Rightarrow$ Wendepunkte

$x \to \pm\infty \Rightarrow g(x) \to +\infty$



$A = \int_{-3}^{-1} g(x)dx + \int_{-1}^{+1} g(x)dx + \int_{+1}^{+2} g(x)dx$

$G(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x\ (+c)$

$\underline{\underline{A \approx 25{,}9\ \text{FE}}}$

Lösungen (2)

(3) Differentialrechnung bei gebrochenrationalen Funktionen

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^3+1}$$
$$D(f)=\{x\in R : x\neq -1\}$$
Nst.: $\underline{x_0=0}$
$$f'(x)=\frac{-2x^4+4x}{(x^3+1)^2}=0$$
EP: $0=-2x\cdot(x^3-2)$

$\underline{\underline{P_1(0;0)}}$; $\underline{\underline{P_2(\sqrt[3]{2};+1{,}06)}}$
$$f''(x)=\frac{4x^6-28x^3+4}{(x^3+1)^3}=0$$
$f''(0)>0\Rightarrow$ Minimum

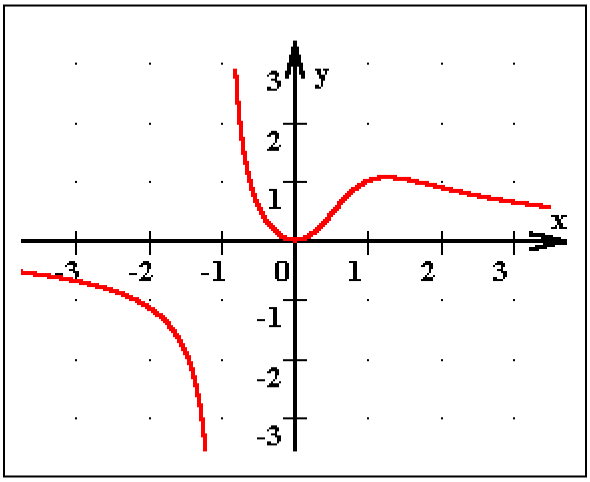
$f''(\sqrt[3]{2})<0\Rightarrow$ Maximum

WP: $0=4x^6-28x^3+4$

$\rightarrow$ Substitution : $x^3=z$

$\underline{\underline{P_3(+0{,}5;+0{,}5)}}$; $\underline{\underline{P_4(+1{,}9;+0{,}9)}}$

$x\rightarrow\pm\infty$: $\underline{\underline{a(x)=0}}$



$$g(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$$
$$D(g)=\{x\in R : x\neq \pm 1\}$$
Nst.: $\underline{x_0=0}$
$$g'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=0$$
EP: $0=x^2\cdot(x^2-3)$

$\underline{\underline{P_1(0;0)}}$; $\underline{\underline{P_{2,3}(\pm\sqrt{2};\pm 2{,}83)}}$
$$g''(x)=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=0$$
$g''(0)=0\Rightarrow$ Widerspruch

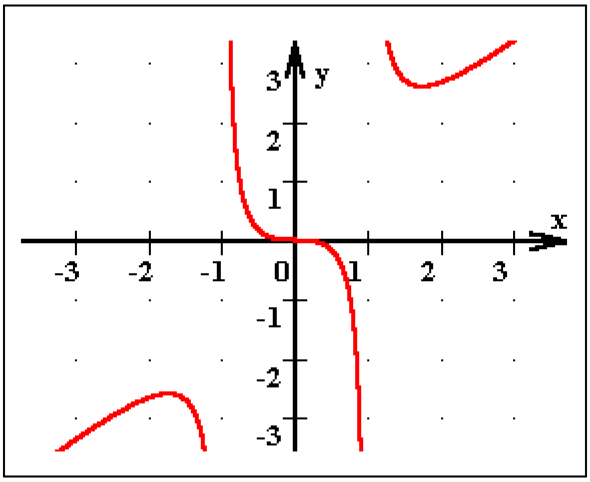
$g''(\sqrt{2})>0\Rightarrow$ Minimum

$g''(-\sqrt{2})<0\Rightarrow$ Maximum

WP: $0=2x^3+6x=2x\cdot(x^2+3)$

$\underline{\underline{P_4(0;0)}}$

$x\rightarrow\pm\infty$: $\underline{\underline{a(x)=x}}$



(4) Integralrechnung bei gebrochenrationalen Funktionen

$$f(x)=\frac{x^2-3}{x+2}=x-2+\frac{1}{x+2}\ \Rightarrow\ A=\int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} f(x)dx=\int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}}(x-2)dx+\int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}}\frac{1}{x+2}dx$$
$$A=\left[\tfrac{1}{2}x^2-2x\right]_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}}+\left|\ln(x+2)\right|_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}}=\underline{\underline{4{,}29\text{ FE}}}$$